XVI Semana da Física SeFis

# Introdução à Mecânica Quântica Pseudo-Hermitiana

**Autor:** Ciro Micheletti Diniz. **Orientador:** Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa.
Departamento de Física, Universidade Federal de São Carlos, UFSCar.

## INTRODUÇÃO

Os operadores *P* e *T* são, respectivamente, o operador paridade, também chamado de operador de reflexão espacial, e operador de reversão temporal e serão utilizados ao longo deste trabalho, por isso já definimos o operador *P*:

$$P\hat{x}P^{-1} = -\hat{x} \qquad P\hat{p}P^{-1} = -\hat{p} \qquad \text{Eq. 1}$$

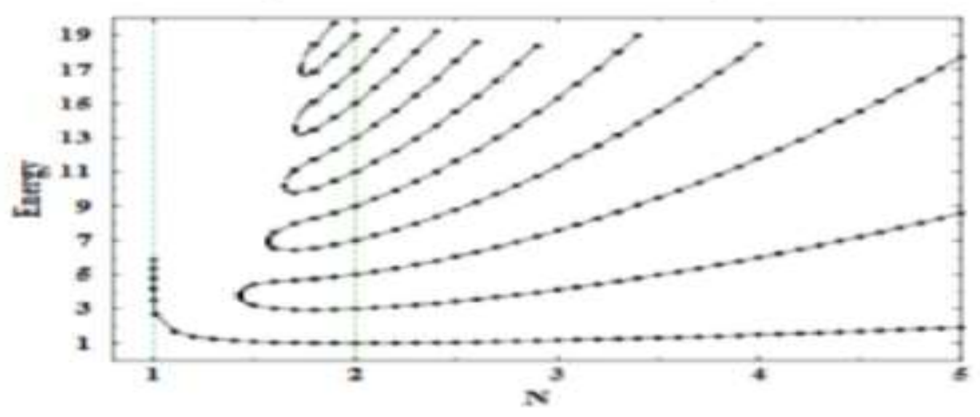
já o operador T é definido da seguinte forma:

$$T\hat{x}T^{-1} = \hat{x} \qquad T\hat{p}T^{-1} = -\hat{p}. \qquad \text{Eq. 2}$$

## Hamiltonianos *PT*-simétricos

Em 1998, C. Bender estudou a família de hamiltonianos do tipo $H = \hat{p}^2 - (i\hat{x})^N$, onde *N* é um número real e positivo, e notou que o espectro energia possuía valores reais em determinados casos. O gráfico obtido por ele foi o seguinte:

Figura 1 – Níveis reais de energia.



É então possível mostrar que, os autovalores são reais enquanto há um compartilhamento de base, e isso será demonstrado em seguida.

*Demonstração*

Considere, incialmente, um hamiltoniano simétrico tanto no espaço quanto no tempo, $H(x,p,t) = H(-x,-p,-t)$. Com isso, e aplicando o operador *PT* na equação de Schrödinger, chega-se na seguinte relação,

$$PTH(x,p,t)PT^{-1} = H(x,p,t) \qquad \text{Eq. 3}$$

Essa relação mostra a definição da invariância do hamiltoniano em relação ao operador *PT*, ou seja, $[PT, H] = 0$. Supondo agora que o hamiltoniano *H* e o operador *PT* compartilhem a mesma base, chega-se na seguinte relação:

$$PT|\psi\rangle = |\psi\rangle \qquad \text{Eq. 4}$$

A partir disso, fica fácil mostrar que $E_n^* = E_n$, que são os autovalores do hamiltoniano, ou seja, **as autoenergias são puramente reais enquanto *H* e *PT* compartilham a mesma base de autoestados, uma vez que *H* é *PT*-invariante.**

## Hamiltonianos não hermitianos Independentes do tempo

Inicialmente define-se um operador $\eta$, conhecido como mapa de Dyson, que será muito utilizado ao longo dos cálculos seguintes.

Aplicando, agora, $\eta$, incialmente independente do tempo, à esquerda da equação de Schrödinger referente a um hamiltoniano *H* não hermitiano e que tem $|\Psi(t)\rangle$ como função de onda solução, é possível redefinir:

$$|\Psi\rangle = \eta^{-1}|\Phi\rangle \qquad \text{Eq. 5}$$

$$\eta H \eta^{-1} = \hat{h} \qquad \text{Eq. 6}$$

Se for imposta a condição ao novo hamiltoniano, chega-se na seguinte relação:

$$\Theta H - H^T\Theta = 0, \qquad \text{Eq. 7}$$

A relação acima é conhecida como **relação de pseudo-hermiticidade.** Essa relação garante que a norma dos estados de *H* seja conservada ao longo do tempo.

Através das definições das equações 5 e 6, conclui-se que os autovalores da energia são comuns aos dois hamiltonianos.

É possível mostrar descobre-se que outras funções de onda são autoestados de *H*. e são definidas do seguinte modo:

$$|\chi\rangle = \eta^T|\Phi\rangle \qquad \text{Eq. 8}$$

Agora que já são conhecidos tanto os hamiltonianos quanto os autoestados de cada um, é importante saber como calcular os observáveis de cada sistema e que eles satisfazem a relação:

$$\hat{o} = \eta O \eta^{-1} \qquad \text{Eq. 10}$$

## CONCLUSÃO

Neste trabalho mostrou-se que os primeiros resultados que mostraram a existência de uma nova classe de hamiltonianos que também possuem autovalores reais de energia, se certas condições forem satisfeitas.

Viu-se também um método de tratar tais hamiltonianos e resultados não intuitivos como o surgimento de forma natural de uma base biortonormal, a relação de pseudo-hermiticidade mostrada na equação 7 e ligação entre os observáveis de sistemas hermitianos e não hermitianos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

**BALLENTINE, L. E.** Quantum Mechanics. WORLD SCIENTIFIC, 2013

**BENDER, C. M.; BOETTCHER, S.** Real spectra in non-hermitian hamiltonians Having PT Symmetry. Physical Review Letters, American Physical Society (APS), v. 80, n. 24, p.5243–5246, jun. 1998.

**BENDER, C. M.** Introduction to -symmetric quantum theory. Contemporary Physics, Informa UK Limited, v. 46, n. 4, p. 277–292, jul. 2005..

**MOSTAFAZADEH, A.** Pseudo-hermiticity versus PT symmetry: The necessary condition for the reality of the spectrum of a non-hermitian hamiltonian. Journal of Mathematical Physics, AIP Publishing, v. 43, n. 1, p. 205–214, jan. 2002.